

Universidade federal de Pernambuco
(UFPE)

Teoria de Categorias visando à
Topologia Algébrica

Paulo André V. Leça
16/12/2018

Contents

1	Introdução	1
2	Categorias, o que são? O que fazem? Para onde vão?	2
3	Módulos	7
4	Funtores	9
5	Transformações Naturais e o Lema de Yoneda	13

1 Introdução

Este relatório refere-se a disciplina MA1077 - Iniciação Científica 1 que foi ministrada pelo professor Fernando Souza e em meu caso, orientada pelo professor Marco Barone. Durante a disciplina foram ministrados encontros semanais entre eu e o professor orientador, com o objetivo de introduzir Topologia Algébrica, mas devido a importância da Teoria de Categorias para o estudo de tal área, o aluno e o orientador concordaram focar no estudo de categorias para em seguida estudar a Teoria da Homotopia e a Teoria de Homologia de forma mais aprofundada e de maneira não oficial após a conclusão da disciplina.

Muitas dificuldades foram encontradas durante o período letivo de 2018.2 e 2018.1, tanto no âmbito acadêmico quanto no pessoal (onde as dificuldades do último influenciaram fortemente o primeiro), acarretando numa má performance geral e me desestimulando bastante ao longo dos períodos; fico feliz que a disciplina de Iniciação Científica tenha sido uma das poucas coisas que tenham me dado motivação para continuar ativo, curioso e acima de tudo feliz ao estudar matemática durante esse tempo difícil.

Gostaria de agradecer ao coordenador do bacharelado Eudes Naziazeno por proporcionar a disciplina em questão, ao professor Fernando Souza por administrar a disciplina e pela sua paciência e compreensão com minha pessoa tanto no começo como no final da disciplina, ao professor Peter Johnson por demonstrar alto interesse em discutir sobre Categorias, outros assuntos e recomendar bibliografias. Finalmente ao professor Marco Barone por demonstrar interesse e suporte ao me guiar pelo assunto e pelos cafés financiados na cantina.

Quali fioretti dal notturno gelo
chinati e chiusi, poi che 'l sol li 'mbianca,
si drizzan tutti aperti in loro stelo,

tal mi fec'io di mia virtude stanca,
e tanto buono ardire al cor mi corse,
...

-Dante Alighieri

Foram utilizadas como referências: An Introduction to Homological Algebra Rotman [2], Homology Mac Lane [1] e as notas "Notes on Grothendieck topologies" Vistoli [3] em ordem de predominância.

2 Categorias, o que são? O que fazem? Para onde vão?

Inicialmente ao definir categorias questões sobre Teoria dos Conjuntos surgem, precisamente sobre o tratamento de classes. Trata-se de algo que por questões de conveniência não será tratado nesse relatório.

Definição 1. *Uma Categoria \mathcal{C} consiste de*

- *Uma classe de objetos de \mathcal{C} denotada $obj\mathcal{C}$*
- *Para cada par ordenado A, B em $obj\mathcal{C}$, um conjunto de morfismos $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$*
- *Uma composição $Hom(A, B) \times Hom(B, C) \rightarrow Hom(A, C)$ denotada por $(f, g) \mapsto gf$ para objetos A, B e C em $obj\mathcal{C}$.*

tais que necessitam satisfazer os seguintes axiomas:

1. Para quaisquer pares ordenado de objetos A e B , o conjunto $Hom(A, B)$ é disjuncto de qualquer outro conjunto $Hom(A', B')$
2. Para todo objeto $A \in obj\mathcal{C} \exists 1_A \in Hom(A, A)$ tal que $f1_A = f$ e $1_B f = f$, onde $f \in Hom(A, B)$. Chamamos 1_A de identidade de A
3. A composição é associativa

Antes de listar alguns exemplos para entender melhor esta definição abstrata, uma notação que também usarei será a de $Mor\mathcal{C}$ a classe de todos os morfismos da categoria \mathcal{C} . Também

vale a pena salientar que o Hom-Set (o conjunto de morfismos para qualquer par ordenado na categoria) para pares **ordenados**, ou seja, temos que $Hom(A, B) \neq Hom(B, A)$.

Exemplo 1. *Provavelmente o exemplo mais simples é a Categoria dos Conjuntos **Sets**, nela temos:*

- *Objetos: Conjuntos*
- *Morfismos: Funções*
- *Composição: Composição de funções*

Note que os axiomas impostos são satisfeitos simplesmente pela definição de função, também observe que $Hom(A, B)$ denota o conjunto de todas as funções do conjunto A ao conjunto B, mas para entendermos melhor a ideia de morfismos, uma das ideias centrais da Teoria de Categorias, precisamos de mais exemplos.

Exemplo 2. *Iremos partir para exemplos de categorias de conjuntos com operações, definimos as seguintes categorias:*

Groups

- *Objetos: Grupos*
- *Morfismos: Homomorfismos de Grupos*
- *Composição: Composição de funções*

Ab

- *Objetos: Grupos Abelianos*
- *Morfismos: Homomorfismos de Grupos*
- *Composição: Composição de funções*

Rings

- *Objetos: Anéis*
- *Morfismos: Homomorfismo de Anéis*
- *Composição: Composição de funções*

Passemos agora para a categoria **Groups**: os morfismos são homomorfismos de Grupos, ao invés de apenas funções; grupos além de serem conjuntos possuem algo a mais, uma operação binária interna, então vemos que por esse exemplo que morfismos buscam preservar a estrutura de seus objetos, nesse caso uma estrutura algébrica. Esses exemplos serão usados mais adiante para outros exemplos.

Outro exemplo de categoria bastante importante é o da Categoria de Espaços Topológicos,

Exemplo 3. Definimos a categoria dos espaços topológicos:

Top

- *Objetos: Espaços Topológicos*
- *Morfismos: Funções contínuas*
- *Composição: Composição de funções*

Vemos novamente que a definição da classe dos morfismos está adaptada à finalidade de preservar a estrutura da categoria que queremos que seja relevante, nesse caso as funções são contínuas, algo ainda mais interessante vem da definição de isomorfismos entre objetos, que vem a seguir:

Definição 2. Um morfismo $f : A \rightarrow B$ em uma categoria \mathcal{C} é um **isomorfismo** se existe um morfismo $g : B \rightarrow A$ em \mathcal{C} tal que

$$gf = 1_A \text{ e } fg = 1_B$$

Chamamos o morfismo g de **inversa** de f .

Com essa definição e com o exemplo da categoria **Top**, é fácil notar que se temos um isomorfismo f na categoria **Top**, então existe um morfismo inverso, nesse caso, uma função inversa **contínua**, logo um isomorfismo em **Top** é apenas um homeomorfismo entre espaços topológicos. Para os exemplos anteriores, **Groups**, **Ab**, **Rings**, teríamos isomorfismos e para **Sets** bijeções.

Agora alguns exemplos interessantes de categorias:

Exemplo 4. Seja X um conjunto parcialmente ordenado (Poset), definimos uma categoria correspondente a X que denotaremos por **PosetX** como:

- *Objetos: Elementos de X*
- *Morfismos:*

$$\text{Hom}(x,y) := \begin{cases} \emptyset & \text{se } x \not\preceq y \\ i_y^x & \text{se } x \preceq y \end{cases}$$

- Composição: $i_y^x i_z^y = i_z^x$

Essa categoria está bem definida devido a reflexividade e transitividade de \preceq .

Note que estamos definindo a categoria para apenas um Poset X e não a categoria de todos os Posets. Também podemos definir similarmente uma categoria para um espaço topológico X e usar a relação de continência de abertos na topologia \subseteq no lugar de \preceq .

Exemplo 5. A categoria de Pointed Sets **Sets***. Seja $X \neq \emptyset$ e $x_0 \in X$, chamamos x_0 de ponto base de X . Definamos um Pointed Set pelo par (X, x_0) e definimos **Sets*** por,

- Objetos: Todos os pares (X, x_0)
- Morfismos:

$$f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0) \text{ definido por } f : X \rightarrow Y \text{ com } f(x_0) = y_0$$

- Composição: Composição de funções

De maneira equivalente podemos definir **Top*** apenas usando espaços topológicos ao invés de conjuntos e acrescentando a condição de continuidade nos morfismos.

Exemplo 6. Um exemplo interessante onde a categoria não leva o nome de seus objetos, mas sim de seus morfismos é a categoria das matrizes sobre um corpo, Matr_F :

- Objetos: Inteiros Positivos
- Morfismos: $\text{Hom}(m, n) = \{\text{Todas as matrizes } n \times m \text{ sobre o corpo } \mathbb{F}\}$
- Composição: Multiplicação de Matrizes

Note a inversão na ordem entre os inteiros positivos n e m entre o nome do Hom-Set e a sua definição, isso é necessário para definirmos a composição como produto de matrizes. E essa composição está bem definida, pois o produto de matrizes é associativo e temos o morfismo identidade em $\text{Hom}(n, n)$, sendo a matriz identidade.

Exemplo 7. A categoria do monóide $G, \mathcal{C}(G)$:

- Objetos: Existe apenas um objeto na categoria, chamado $*$
- Morfismos: $\text{Hom}(*, *) = G$, ou seja, o único Hom-Set é o monóide
- Composição: $\text{Hom}(*, *) \times \text{Hom}(*, *) \mapsto \text{Hom}(*, *)$ com $G \times G \mapsto G$

Repare que os Morfismos $*$ \mapsto $*$ não são funções, mas sim a operação binária do monóide.

O último exemplo dessa seção é muito importante para o estudo da Teoria de Homotopia, e leva o nome da mesma, mas antes, duas definições,

Definição 3. Se $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ são funções contínuas, onde X e Y são espaços topológicos, então digo que f_0 é **homotópico** a f_1 , $f_0 \simeq f_1$, se existe uma função contínua $h : I \times X \rightarrow Y$ (onde $I = [0, 1]$), tal que $h(0, x) = f_0(x)$ e $h(1, x) = f_1(x)$ para todo $x \in X$.

Chamamos a função h da definição acima de **homotopia** e podemos pensar essa definição da seguinte forma, durante o intervalo de tempo $[0, 1]$ temos que h deforma f_0 em $t = 0$ em f_1 em $t = 1$. Uma homotopia é uma relação de equivalência no conjunto das funções contínuas $X \rightarrow Y$ e a classe de equivalência $[f]$ de fé chamada de **Classe de homotopia**.

Definição 4. Entendemos por equivalência homotópica um mapa contínuo $f : X \rightarrow Y$ para o qual existe um $g : Y \rightarrow X$ também contínuo, tal que $gf \simeq 1_X$ e $fd \simeq 1_Y$. Note que existe um isomorfismo com as composições entre f e g , e não uma igualdade, ou seja g não é uma inversa de f , mas podemos ver como uma inversa homotópica.

Exemplo 8. Uma categoria de homotopia **Htp** é definida como:

- *Objetos:* Todos os espaços Topológicos
- *Morfismos:* Todas as classes de homotopia de funções contínuas
- *Composição:* $[f][g] = [fg]$ se $f \simeq f'$ e $g \simeq g'$

Note que a composição $fg \simeq f'g'$ é preservada por homotopia e o morfismo identidade são as classes de homotopia do tipo $[1_X]$.

Definição 5. Uma categoria \mathcal{S} é uma subcategoria de uma categoria \mathcal{C} se:

1. $obj\mathcal{S} \subseteq obj\mathcal{C}$
2. $Hom_{\mathcal{S}}(A, B) \subseteq Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \forall A, B \in obj\mathcal{S}$
3. Se $f \in Hom_{\mathcal{S}}(A, B), g \in Hom_{\mathcal{S}}(B, C)$, então $gf \in Hom_{\mathcal{S}}(A, C)$ é igual a $gf \in Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$
4. Se $A \in obj\mathcal{S}$, então $1_A \in Hom_{\mathcal{S}}(A, A)$ é igual a identidade $1_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$

Pela definição acima, vale citar que a categoria de homotopia **Htp** não é uma subcategoria de **Top**, mesmo que $obj\mathbf{Htp} = obj\mathbf{Top}$, os morfismos em **Htp** não são funções contínuas, mas sim classes de homotopia.

3 Módulos

Dando uma pausa nos exemplos, irei falar um pouco sobre módulos e a categoria de módulos.

Definição 6. *Seja R um Anel. Um R -Modulo Esquerdo M é um grupo abeliano com uma operação binária $\mu : R \times M \rightarrow M$ com $(r, m) \mapsto rm$ chamada multiplicação por escalar, tal que satisfaz as seguintes relações:*

1. $(r + r')m = rm + r'm$
2. $r(m + m') = rm + rm'$
3. $1m = m$
4. $r(r'm) = (rr')m$

Das relações dadas na definição, segue que:

- $0m = 0$, por
 $0m = 0 + 0m = (0 + 0)m = 0m + 0m$, como M é um grupo, temos que $0m = 0$
- $(-1)m = -m$, por
 $m + (-1)m = (1-1)m = 0m = 0$, logo $(-1)m$ é o inverso de m , assim $(-1)m = -m$

Alguns exemplos seguem:

Exemplo 9.

- Se R é um corpo, então um R -Modulo V é nada mais que um espaço vetorial V
- Para um corpo F , seja $R = \mathbb{F}[x]$, então um R -Modulo V é um espaço vetorial sobre \mathbb{F} com uma operação linear fixa $T : V \rightarrow V$ dada pela multiplicação à esquerda por $x \in R$
- Sendo $R = \mathbb{Z}$, temos um \mathbb{Z} -Modulo, tal que para $a \in \mathbb{Z}$ com $am = m + \dots + m$ (soma generalizada de a -cópias de m), então um \mathbb{Z} -Modulo é um grupo abeliano (noção de múltiplos inteiros).
- Um \mathbb{Z}_k -Modulo é um grupo abeliano no qual todo elemento possui como ordem um múltiplo de k .
- O R -Modulo R , ou seja, vemos o mesmo anel R como o grupo, onde pegamos $\mu : R \times R \rightarrow R$ como produto do anel que satisfaz as relações de associatividade e identidade sobre R , logo tratamos μ como o produto no anel R .

Definição 7. Um subconjunto S de um R -Módulo é um **Submódulo Esquerdo** se é fechado sobre a adição e se para cada $r \in R$ e $s \in S$ temos $rs \in S$, ou seja, um módulo.

Se pegarmos um Submódulo Esquerdo I de R (R como R -Módulo), então temos que I é um Ideal Esquerdo de R .

Definição 8. Assim definimos a categoria ${}_R\text{Mod}$ como a categoria dos R -Módulos Esquerdos,

- *Objetos:* Todos os R -Módulos Esquerdos
- *Morfismos:* Todas as funções $\alpha : A \rightarrow B$ para A e B R -Módulos, tal que,

$$\alpha(a + a') = \alpha(a) + \alpha(a')$$

$$\alpha(ra) = r\alpha(a)$$
 Chamamos α um homomorfismo de módulos.
- *Composição:* Composição de funções

Por fim, denotamos os Hom-Sets in ${}_R\text{Mod}$ por $\text{Hom}_R(A, B)$

Definição 9. Seja $\alpha : A \rightarrow B$ um homomorfismo de módulos, denominamos A de domínio de α e B de seu contradomínio. Se $\text{Ker}\alpha = 0$, dizemos que α é um monomorfismo, se $\text{Im}\alpha = B$ dizemos que é um epimorfismo e se α é tanto monomorfismo como epimorfismo, então α é um isomorfismo.

Proposição 1.

- $\text{Im}\alpha$ é submódulo de B (R -Módulo).
Prova: Dados $b = \alpha(a)$ e $b' = \alpha(a')$ em $\text{Im}\alpha$, vemos que $\alpha(a) + \alpha(a') = \alpha(a + a') \in \text{Im}\alpha$, logo $\text{Im}\alpha$ é fechada pela adição. Dados $r \in R$ e $b = \alpha(a) \in \text{Im}\alpha$, temos $r\alpha(a) = \alpha(ra) \in \text{Im}\alpha$. Logo $\text{Im}\alpha$ é submódulo de B .
- $\text{Ker}\alpha$ é submódulo de A (R -Módulo).
Prova: Dados $a, a' \in \text{Ker}\alpha$, vemos que $0 = \alpha(a) + \alpha(a') = \alpha(a + a')$ então $a + a' \in \text{Ker}\alpha$. Pegue $r \in R$ e $a \in \text{Ker}\alpha$, então, $\alpha(ra) = r\alpha(a) = r0 = 0$ então $ra \in \text{Ker}\alpha$. Assim $\text{Ker}\alpha$ é submódulo de A .

Note que em geral dados R e G anéis e $\phi : R \rightarrow G$ um homomorfismo de anéis então $\text{Ker}\phi$ não seria subanel, pois para $r \in R$ e $a \in \text{Ker}\phi$, temos $\phi(ra) = \phi(r)\phi(a) \neq r\phi(a)$ A igualdade só é verdade se ϕ é a identidade. Em anéis temos que, para ϕ homomorfismo de anéis, $\text{Ker}\phi$ é um Ideal do domínio de ϕ , nesse caso R .

Note que de maneira simples podemos mostrar que dados α_1 e α_2 homomorfismos, $\alpha_1 + \alpha_2$ é homomorfismo. E para homomorfismos α e β tais que $Domain\beta = Codomain\alpha$, então $\beta\alpha$ é homomorfismo.

Definição 10. Para $\alpha : A \rightarrow B$ e $\beta : B \rightarrow C$, definimos o par (α, β) como exato em B se $Ker\beta = Im\alpha$.

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

Uma sequência de n -homomorfismos $\alpha_i : A_i \rightarrow A_{i+1}$ é dita exata se (α_{i-1}, α_i) é exato em A_i .

$$A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} A_n$$

Proposição 2. Sejam B e B' R -Módulos, se $\beta : B \rightarrow B'$ com $T \subseteq Ker\beta$, existe um único homomorfismo de módulos $\beta' : B/T \rightarrow B'$ com $\beta'\pi = \beta$, onde π é o mapa quociente. Isso quer dizer que o seguinte diagrama, com $\beta(T) = 0$, comuta:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\pi} & B/T \\ & \searrow \beta & \downarrow \beta' \\ & & B' \end{array}$$

Prova: Faça $\beta'(b+T) = \beta b$; Já que $T \subseteq Ker\beta$, a igualdade está bem definida.

4 Funtores

Voltamos a tratar de Categorias, trabalhando agora com Funtores.

Definição 11. Se \mathcal{C} e \mathcal{D} são categorias, então um **funtor covariante** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é uma função tal que:

1. Se $A \in obj\mathcal{C}$, então $F(A) \in obj\mathcal{D}$
2. Se $f : A \rightarrow A'$ é morfismo em \mathcal{C} então $F(f) : F(A) \rightarrow F(A')$ é morfismo em \mathcal{D}

3.

$$\begin{array}{ccc} Se & A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C & \text{então,} \\ & & \\ & F(A) \xrightarrow{Ff} F(B) \xrightarrow{Fg} F(C) & e F(gf) = F(g)F(f) \end{array}$$

4. $F(1_A) = 1_{F(A)} \forall A \in obj\mathcal{C}$

Revisitando a definição de categorias e seus axiomas, é fácil ver que funtores preservam as propriedades entre categorias. Os exemplos adiante explicitam mais isso.

Exemplo 10. Se \mathcal{S} é uma subcategoria de uma categoria \mathcal{C} , então podemos redefinir uma subcategoria dizendo que $I : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ é um funtor, chamado de *Funtor Inclusão de \mathcal{S} em \mathcal{C}* .

Exemplo 11. Dada uma categoria \mathcal{C} , existe um funtor chamado **funtor identidade** $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, definido por:

- $1_{\mathcal{C}}(A) = A, \forall A \in \text{obj}\mathcal{C}$
- $1_{\mathcal{C}}(f) = f, \forall f \in \text{Mor}(\mathcal{C})$

Agora será definido um funtor bastante importante, o Hom-funtor.

Definição 12. Se \mathcal{C} é uma categoria e dado um objeto A fixo em \mathcal{C} , então o Hom-funtor $F_A : \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$ é definido por,

$$F_A(B) = \text{Hom}(A, B) \quad \forall B \in \text{obj}\mathcal{C}$$

e se $f : B \rightarrow B'$, então $\text{Hom}(A, f) : \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A, B')$ é dado por $\text{Hom}(A, f) : h \mapsto fh$. Chamamos $\text{Hom}(A, f)$ de *mapa induzido* e o denotamos por $f_* : h \mapsto fh$.

Iremos agora verificar se o Hom-funtor satisfaz as propriedades de ser um funtor, a functorialidade ($F(gf) = F(g)F(f)$) e levar a identidade de uma categoria para a outra.

Seja $f : B \rightarrow C$ e $g : C \rightarrow D$. Mostraremos que $(gf)_* = f_*g_*$. Ambos possuem mesmo domínio e contra domínio, $(gf)_*, f_*g_* : \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A, D)$.

Se $h \in \text{Hom}(A, B)$, então,

$$(gf)_* : h \mapsto (gf)h \tag{1}$$

$$g_*f_* : h \mapsto fh \mapsto g(fh) \tag{2}$$

Por associatividade, $(gf)h = g(fh)$, logo $(gf)_* = g_*f_*$. Se f é a identidade $1_B : B \mapsto B$, então

$$(1_B)_* : h \mapsto 1_B h = h \quad \forall h \in \text{Hom}(A, B) \tag{3}$$

$$(1_B)_* = 1_{\text{Hom}(A, B)} \tag{4}$$

Um funtor interessante para "brincar" com a idéia de estruturas matemáticas é o **funtor de esquecimento**, que "esquece" uma determinada estrutura de um objeto matemático.

Exemplo 12. Definimos o funtor esquecimento $U : \text{Groups} \rightarrow \text{Sets}$ como $U(G)$, onde o G do domínio é um Grupo $(G, *)$ e na imagem é o conjunto de G sem a estrutura da operação binária do grupo ("esquecemos" ela). E para f homomorfismo em Groups , $U(f)$ é apenas uma função.

Podemos fazer várias variantes do funtor esquecimento, definindo como $U' : \text{Rings} \mapsto \text{Ab}$, esquecendo a segunda operação binária do anel, ou até $U'' : \text{Rings} \mapsto \text{Sets}$ esquecendo ambas as operações binárias.

Na definição de funtor foi definido o funtor **covariante**, agora definiremos o **funtor contravariante**.

Definição 13. Sejam \mathcal{C}, \mathcal{D} categorias. Um funtor contravariante $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é uma função tal que,

1. Se $A \in \text{obj}\mathcal{C}$, então $F(A) \in \text{obj}\mathcal{D}$
2. Se $f : A \rightarrow A'$ é morfismo em \mathcal{C} então $F(f) : F(A') \rightarrow F(A)$ é morfismo em \mathcal{D}
- 3.

$$\begin{array}{ccc} \text{Se } A & \xrightarrow{f} & B \xrightarrow{g} C \text{ então,} \\ & & \\ F(C) & \xrightarrow{Fg} & F(B) \xrightarrow{Ff} F(A) \end{array} \quad \text{e } F(gf) = F(f)F(g)$$

4. $F(1_A) = 1_{F(A)} \quad \forall A \in \text{obj}\mathcal{C}$

Note a inversão dos mapas ao aplicarmos o funtor contravariante. Os seguintes exemplos irão trazer um melhor entendimento das diferenças entre funtores covariantes e contravariantes.

Exemplo 13. Se \mathcal{C} é uma categoria e fixo $B \in \text{obj}\mathcal{C}$ o Hom-funtor contravariante $F^B : \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$, também denotado por $\text{Hom}(-, B)$, ele é definido para todos os objetos C na categoria \mathcal{C} , por

$$F^B(C) = \text{Hom}(C, B)$$

e se $f : C \rightarrow C'$ é morfismo em \mathcal{C} , então $F^B(f) : \text{Hom}(C', B) \rightarrow \text{Hom}(C, B)$ é dado por $F^B : h \mapsto hf$. Também chamamos o tal mapa de mapa induzido e o denotamos por f_* . Note que a composição hf possui ordem contrária de composição com respeito a do Hom-funtor covariante. Tal inversão de ordem ficará mais clara ao checarmos os axiomas de funtor.

Dados morfismos $f : C \rightarrow C'$ e $g : C' \rightarrow C''$, iremos comparar as composições:

$$(gf)^*, f^*g^* : \text{Hom}(C'', B) \rightarrow \text{Hom}(C, B)$$

Se $h \in \text{Hom}(C'', B)$, então,

$$(gf)^* : h \mapsto h(gf)$$

; e também vemos que,

$$f^*g^* : h \mapsto hg \mapsto (hg)f = h(gf)$$

. Agora iremos verificar o mapa de identidade $1_C : C \rightarrow C$,

$$(1_C)^* : h \mapsto h1_C = h$$

para todo $h \in \text{Hom}(C, B)$, então $(1_C)^* = 1_{\text{Hom}(C, B)}$.

Mostraremos agora um exemplo importante de funtor contravariante.

Exemplo 14. Se V é um espaço vetorial sobre um corpo k , então seu **espaço dual** é $V^* = \text{Hom}_k(V, k)$ (O conjunto dos funcionais lineares em V). V^* é um k -Módulo se para $f \in V^*$ e $a \in k$ definirmos $af : V \rightarrow k$ por $af : v \mapsto a[f(v)]$, ou seja, como elemento do espaço dual. Se $f : V \rightarrow W$ é uma transformação linear, então seu mapa induzido $f^* : W^* \rightarrow V^*$ também é uma transformação linear. Finalmente o **funtor do espaço dual** é denotado por $\text{Hom}_k(-, k) : \text{Mod} \rightarrow \text{Mod}$.

Definição 14. Um funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é dito **fiel** se, para todos $A, B \in \text{obj}\mathcal{C}$ as funções induzidas pelo funtor, $F_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB)$ tais que $f \mapsto Tf$ são injetivas. Um funtor é dito **pleno** se tais funções são sobrejetivas.

Uma categoria é dita **concreta** se existe um funtor fiel $U : \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$. Podemos entender categorias concretas como aquelas cujos morfismos podem ser vistos como funções.

Definição 15. Se \mathcal{U} é a topologia de um espaço topológico X e \mathcal{C} é uma categoria, então definimos um **prefeixe sobre X em \mathcal{C}** como um funtor contravariante $P : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{C}$.

Definição 16. Se \mathcal{C} é uma categoria, definimos a **categoria oposta \mathcal{C}^{op}** como uma categoria com $\text{obj}(\mathcal{C}^{op}) = \text{obj}\mathcal{C}$ com morfismos $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ e composição $g^{op}f^{op} = (fg)^{op}$.

Basicamente a categoria oposta inverte o domínio com o contradomínio de um morfismo para cada par de objetos na categoria. É fácil verificar que um funtor contravariante $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ é a mesma coisa que um funtor covariante $S : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathcal{C}^{op}$.

Em Sets^{op} temos, para qualquer conjunto X , o conjunto $\text{Hom}_{\text{Sets}^{op}}(X, \emptyset)$ que possui exatamente um elemento, i^{op} , onde i é a inclusão $\emptyset \rightarrow X$ em $\text{Hom}_{\text{Sets}}(\emptyset, X)$. Mas i^{op} não pode ser uma função, pois não há funções de um conjunto X para \emptyset .

5 Transformações Naturais e o Lema de Yoneda

Agora que exploramos um pouco das definições e alguns exemplos da teoria de categorias, iremos "subir de nível" um pouco mais. Daqui para frente denotaremos o Hom-funtor contravariante para um objeto X como $h_X := \text{Hom}(-, X)$.

Definição 17. *Sejam $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ funtores covariantes. Uma **transformação natural** $\tau : F \rightarrow G$ é uma família de morfismos em \mathcal{B} parametrizada pelos objetos de \mathcal{A} ,*

$$\tau = (\tau_A : FA \rightarrow GA)_{A \in \text{obj } \mathcal{A}}$$

tal que o seguinte diagrama comuta para todo morfismo $f : A \rightarrow A'$ em \mathcal{A} :

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{\tau_A} & GA \\ \downarrow Ff & & \downarrow Gf \\ FA' & \xrightarrow{\tau_{A'}} & GA' \end{array}$$

Definição 18. *Seja \mathcal{C} uma categoria. Considere uma nova categoria, denotada por $\text{Hom}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \text{Sets})$, cujos objetos são os funtores de \mathcal{C}^{op} para a categoria Sets e os morfismos entre os funtores são as transformações naturais.*

Definição 19. *Fixe um objeto X em uma categoria \mathcal{C} . Existe um funtor*

$$h_X : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$$

que envia um objeto \mathcal{U} da categoria \mathcal{C} ao conjunto

$$h_X \mathcal{U} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, X)$$

Seja $\alpha : \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{U}$ um morfismo em \mathcal{C} . Um morfismo $f : X \rightarrow Y$ produz uma função $h_f \mathcal{U} : h_X \mathcal{U} \rightarrow h_Y \mathcal{U}$ para cada \mathcal{U} em \mathcal{C} obtida por composição com f . Isso define uma transformação natural $h_f : h_X \rightarrow h_Y$, então para todo mapa $\alpha : \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{U}$ o seguinte diagrama comuta,

$$\begin{array}{ccc} h_X \mathcal{U} & \xrightarrow{h_f \mathcal{U}} & h_Y \mathcal{U} \\ \downarrow h_X \alpha & & \downarrow h_Y \alpha \\ h_X \mathcal{U}' & \xrightarrow{h_f \mathcal{U}'} & h_Y \mathcal{U}' \end{array}$$

Mandando cada objeto X de \mathcal{C} para o funtor h_X e cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ em \mathcal{C} para a transformação natural $h_f : h_X \rightarrow h_Y$, definindo um funtor $\mathcal{C} \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \text{Sets})$

Teorema 1. *Lema de Yoneda (Versão Fraca)* Sejam X e Y objetos de \mathcal{C} . A função

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(h_X, h_Y)$$

que envia $f : X \rightarrow Y$ para $h_f : h_X \rightarrow h_Y$ é bijetiva.

Ou seja, o funtor $\mathcal{C} \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \text{Sets})$ é plenamente fiel. Mas falha em ser uma equivalência de categorias, porque em geral não é necessariamente sobrejetivo. Isso significa que nem todo funtor $\mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Sets}$ é isomorfo a um funtor do tipo h_X . Porém se restringirmos à subcategoria cheia da imagem do funtor, conseguimos uma categoria equivalente a \mathcal{C}

Definição 20. Um **funtor representável** em uma categoria \mathcal{C} é um funtor que é isomorfo ao um funtor da forma h_X para algum objeto X em \mathcal{C} . Se F satisfaz tais condições, dizemos que F é representado por X .

Dado dois isomorfismos $F \simeq h_X$ e $F \simeq h_Y$, temos que o isomorfismo resultante $h_X \simeq h_Y$ vem de um isomorfismo único $X \simeq Y$ em \mathcal{C} devido ao Lema de Yoneda (Versão Fraca). Logo dois objetos representando o mesmo funtor são canonicamente isomorfos. A condição de um funtor ser representável pode ser dada por uma expressão com a versão mais geral do Lema de Yoneda.

References

- [1] Saunders Mac Lane. *Homology*. Springer-Verlag, 1995.
- [2] Joseph Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Springer-Verlag, 2009.
- [3] Angelo Vistoli. “Notes on Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory”. In: *arXiv preprint math/0412512* (2004).